CAMPO ELECTROMAGNÉTICO LIBRE

Ecs. clásicas del campo electromagnético (en interacción con sus fuentes $j^\mu = (\rho, \vec{J})$) en unidades Heaviside (i.e., $\epsilon_0 \equiv 1$ con lo cual $F_{Coulomb} = \frac{1}{4\pi} qq'/r^2$) y $c \equiv 1$:

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho \;,\quad \vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J} \;,\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \;,\quad \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}}$$

Ecs. Maxwell

- Ecuación de continuidad:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0 \iff \partial_\mu j^\mu(x) = 0}$$

$\vec{E} \to$ Campo eléctrico
$\vec{B} \to$ Inducción magnética
$j^\mu \equiv (\rho, \vec{J}) \to$ cuadricorriente eléctrica

- Tensor intensidad del campo $F^{\mu\nu}$ (antisimétrico, de 2º orden)

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} = \begin{pmatrix} F^{00} & F^{01} & F^{02} & F^{03} \\ F^{10} & F^{11} & \cdots & \\ \vdots & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix};$$

$(E^1, E^2, E^3) \equiv (E_x, E_y, E_z)$
$(B^1, B^2, B^3) \equiv (B_x, B_y, B_z)$

- Tensor dual $\tilde{F}^{\mu\nu}$

$$\tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = -\tilde{F}^{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ & 0 & E^3 & -E^2 \\ & & 0 & E^1 \\ & & & 0 \end{pmatrix};$$

$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \to$ Tensor totalmente antisimétrico
$\epsilon^{0123} = +1$
$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$

Notar que se pasa de $F^{\mu\nu}$ a $\tilde{F}^{\mu\nu}$ haciendo: $\vec{E} \to \vec{B}$ y $\vec{B} \to -\vec{E}$ (transf. dual)

- Cuadripotencial electromagnético: $A^\mu(x) \equiv (A^0, \vec{A}) = (\phi, \vec{A})$

ϕ = pot. escalar
$\vec{A}$ = pot. vector

ϕ y $\vec{A}$ satisfacen:

$$\left.\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} &= \vec{\nabla}\times\vec{A} \end{aligned}\right\} \iff \boxed{F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu}$$

Con esto las ecs. de Maxwell se pueden reescribir en forma manifiestamente covariante:

$$\boxed{\left.\begin{aligned} \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \vec{0} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} &= \vec{0} \end{aligned}\right\} \iff \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \;;\quad \left.\begin{aligned} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} &= \rho \\ \vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \vec{J} \end{aligned}\right\} \iff \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu}$$

Nota: $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \to \partial_\nu j^\nu = \underbrace{\partial_\nu \partial_\mu}_{\text{simétrico}} \underbrace{F^{\mu\nu}}_{\text{antisimétrico}} = 0 \to \partial_\nu j^\nu = 0$ (Ec. continuidad)

- En términos de $F^{\mu\nu}$ las ecs. de Max. son ec. diferenciales de 1er orden ($\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$). Sin embargo:

$$\boxed{j^\nu = \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \Box A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu)}$$

Ec. diferencial de 2do orden

- Interpretaremos $A^\mu(x)$ como el campo cuántico asociado al fotón. Sin embargo hay una arbitrariedad en la definición de $A^\mu(x)$ (inv. gauge del electromagnetismo)

- El electromagnetismo es invariante bajo transformaciones gauge:

Sea: $A'^{\mu}(x) = A^{\mu}(x) + \partial^{\mu}\Lambda(x) \iff \begin{cases} \phi' = \phi + \partial\Lambda/\partial t \\ \vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla}\Lambda \end{cases}$ transf. gauge

siendo $\Lambda(x)$ función arbitraria de $(\vec{x},t)$. Entonces ocurre que: $F'^{\mu\nu}(x) = F^{\mu\nu}(x)$ (Distintos cuadripotenciales conducen a los mismos campos físicos $\vec{E}$ y $\vec{B}$).

- A pesar de la arbitrariedad anterior $A^{\mu}(x)$ es un campo físico (considerar el experimento de Aharonov & Bohm) $\to$ $A^{\mu}(x)$ será nuestro campo cuántico

- Densidad Lagrangiana

$$\boxed{\mathcal{L} = \underbrace{-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}}_{\text{densidad Lagrangiana libre}} \underbrace{- j_{\nu}A^{\nu}}_{\text{Término de interacción del campo con la cuadricorriente}}}$$

Se obtiene en electrodinámica clásica

Ecs. de movimiento:

$$0 = \partial_{\mu}\underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}A_{\nu})}}_{-F^{\mu\nu}} - \underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_{\nu}}}_{-j^{\nu}} = -\partial_{\mu}F^{\mu\nu} + j^{\nu} \to \boxed{\Box A^{\nu} - \partial^{\nu}(\partial_{\mu}A^{\mu}) = j^{\nu}}$$

- Campo libre $\to j^{\nu}(x) \equiv 0$

$$\boxed{\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \longrightarrow \Box A^{\nu} - \partial^{\nu}(\partial_{\alpha}A^{\alpha}) = 0}$$

Clásicamente uno suele trabajar en el gauge de Lorentz ($\to \partial_{\mu}A^{\mu} = 0$) con lo cual:

Ecs. mov. clásicas: $\Box A^{\nu}(x) = 0$

Veremos que cuánticamente sin embargo nos veremos obligados a trabajar en el gauge de radiación que, a diferencia del gauge de Lorentz, no es manifiestamente covariante.

- Para construir la T^{a} cuántica necesitamos los momentos canónicos del campo:

$$A_{\mu}(x) \longrightarrow \pi^{\mu}(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_{\mu})} = -F^{0\mu} = F^{\mu 0} = (\partial^{\mu}A^{0} - \partial^{0}A^{\mu})$$

Entonces:

$$\begin{cases} \pi^{k}(x) = \partial^{k}A^{0} - \partial^{0}A^{k} \longrightarrow \vec{\pi}(x) = -\vec{\nabla}A^{0} - \dot{\vec{A}} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \vec{E} \\ \pi^{0}(x) = F^{00} = 0 \quad (\Rightarrow [A_0, \pi^{0}] = 0 \to A_0 \text{ será un c-número!}) \end{cases}$$

- Intentamos el método de cuantización canónica:

$$[A_j(\vec{x},t), \pi^{k}(\vec{x}',t)] = i\delta_j^{\ k}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}') \iff [A^j(\vec{x},t), \pi^{k}(\vec{x}',t)] = ig^{jk}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')$$

$$[A_0(\vec{x},t), \pi^{0}(\vec{x}',t)] = 0 \quad !! \quad \to A^0 \text{ queda singularizado: es un c-número.}$$

Los demás conmutadores nulos.

- Problemas:
  1) A^0 queda singularizado frente a las componentes espaciales: este procedimiento de cuantización no es manifiestamente covariante
  2) La 1^{a} relación de conmutación es inconsistente con la ec. Maxwell $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$!

Veamos que la relación de conmutación $[A^j(\vec{x},t),\pi^k(\vec{x}',t)] = ig^{jk}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')$ es inconsistente con la ecuación $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \partial_k E^k = 0 \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x'^k}[A^j(\vec{x},t),E^k(\vec{x}',t)] = 0 \text{ ; Sin embargo, por otro lado:}$$

$$\frac{\partial}{\partial x'^k}[A^j(\vec{x},t),\underbrace{E^k(\vec{x}',t)}_{\pi^k(\vec{x}',t)}] = \frac{\partial}{\partial x'^k}\Big(ig^{jk}\underbrace{\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')}_{\int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')}}\Big) = -\int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}k^j e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')} \neq 0$$

$$-i\vec{k}\vec{x}' = ik_k x'^k$$

- <u>Solución</u>: Modificar el término derecho del conmutador (para que sea de cuadridivergencia nula). Supone modificar el método de cuantización canonica:

$$g^{jk}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}') \longrightarrow \int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')}\left(g^{jk}+\frac{k^jk^k}{\vec{k}^2}\right) \equiv D^{jk}_{trans}(\vec{x}-\vec{x}')$$

Entonces:

$$[A^j(\vec{x},t),\pi^i(\vec{x}',t)] = iD^{ji}_{trans.}(\vec{x}-\vec{x}')$$

- El problema con $A^0(x)$ lo solucionamos trabajando en un gauge en el que $A^0=\phi=0$.

Imponemos: $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$ (gauge de Coulomb) $\longrightarrow \phi\sim\int\frac{\rho d^3\vec{r}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

con lo cual, para campos libres ($\rho=0$): $\phi=A^0=0$.

Por tanto, trabajaremos con un campo $A_\mu(x)$ tal que: $\boxed{\begin{matrix}\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0\\ A^0=\phi=0\end{matrix}}$ gauge de radiación. No es manifiestamente covariante

(Entonces de los 4 grados de libertad iniciales sólo quedarán dos (correspondientes a los 2 fotones transversos))

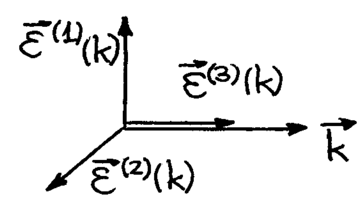
- <u>Ecuaciones de movimiento en el gauge de radiación</u>: $\boxed{\begin{matrix}\Box\vec{A}(x)=\vec{0}\\ A^0(x)=0\end{matrix}}$

$$\Box\vec{A}=\vec{0} \longrightarrow \vec{A}(\vec{x},t)=\int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}}}[\vec{a}(k)e^{-ikx}+\vec{a}^+(k)e^{ikx}]$$

Para cada modo normal $\vec{k}$ escogemos una base $\{\vec{\varepsilon}^{(\lambda)}(k)\}$:

$$\vec{\varepsilon}^{(\lambda)}(k)\cdot\vec{\varepsilon}^{(\lambda')}(k)=\delta^{\lambda\lambda'} \qquad \lambda,\lambda'=1,2,3 \quad \text{(ortonormalidad)}$$

$$\vec{\varepsilon}^{(\lambda)}(k)\cdot\vec{k}=0 \qquad \text{si } \lambda=1,2 \quad (\lambda=1,2 \text{ son transversos})$$



$\vec{\varepsilon}^{(1)}(k), \vec{\varepsilon}^{(2)}(k) \longrightarrow$ Vectores de polarización transversal.

Entonces:

$$\vec{a}(k)=\sum_{\lambda=1}^{3}a^{(\lambda)}(k)\vec{\varepsilon}^{(\lambda)}(k) \qquad \vec{a}^+(k)=\sum_{\lambda=1}^{3}a^{+(\lambda)}(k)\vec{\varepsilon}^{(\lambda)}(k)$$

Pero en el gauge de radiación: $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$

$$0=\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=i\int d\tilde{k}\,[\vec{k}\cdot\vec{a}(k)e^{-ikx}-\vec{k}\cdot\vec{a}^+(k)e^{ikx}] \Longrightarrow \left|\begin{matrix}\vec{k}\cdot\vec{a}(k)=0 \longrightarrow a^{(3)}(k)=0\\ \vec{k}\cdot\vec{a}^+(k)=0 \longrightarrow a^{+(3)}(k)=0\end{matrix}\right.$$

($a^{(3)}(k)=a^{(3)+}(k)=0 \Longrightarrow \nexists$ fotones longitudinales)

luego:

$$\boxed{\vec{A}(\vec{x},t)=\int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}}}\underbrace{\sum_{\lambda=1}^{2}}_{\text{suma a fotones transversos (físicos)}}[a^{(\lambda)}(k)\vec{\varepsilon}^{(\lambda)}(k)e^{-ikx}+a^{+(\lambda)}(k)\vec{\varepsilon}^{(\lambda)}(k)e^{ikx}]}$$

En componentes: $(A_i=-A^i)$:

$\vec{A}\equiv(A^1,A^2,A^3)$

$\vec{\varepsilon}^{(\lambda)}\equiv(\varepsilon^{(\lambda)1},\varepsilon^{(\lambda)2},\varepsilon^{(\lambda)3})$

$$A_i(x)=\int d\tilde{k}\sum_{\lambda=1}^{2}[a^{(\lambda)}(k)\varepsilon_i^{(\lambda)}(k)e^{-ikx}+a^{+(\lambda)}(k)\varepsilon_i^{(\lambda)}(k)e^{ikx}]$$

- Metodo de cuantización de métrica indefinida de Gupta-Bleuler

Es un método manifiestamente covariante que parte de un $\mathcal{L} \neq \mathcal{L}_{\text{electrom.}}$. Se recupera el electromagnetismo imponiendo condiciones a los estados físicos (fotones físicos).

Partimos de:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2} (\partial_\rho A^\rho)^2 \qquad \text{con: } \lambda \neq 0 \ , \ \partial_\rho A^\rho \neq 0$$

Entonces:

$$\pi^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = F^{\mu 0} - \lambda g^{\mu 0} (\partial_\rho A^\rho) \longrightarrow \pi^0(x) = -\lambda(\partial_\rho A^\rho) \neq 0$$

Ecs. de movimiento:

$$\Box A^\mu - (1-\lambda) \partial^\mu (\partial_\rho A^\rho) = 0$$

Nota: $\dfrac{\partial (\partial_\beta A^\beta)^2}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = 2 g^{\mu\nu} (\partial_\beta A^\beta)$

Se puede demostrar que los resultados físicos son independientes de λ ($\lambda \neq 0$): Tomaremos $\lambda = 1$ ($\rightarrow$ "gauge de Feynman")

Ecs. de mov. en el gauge de Feynman ($\lambda \equiv 1$): $\quad \Box A^\mu(x) = 0 \quad$ (coinciden con las ecs. de Maxwell en el gauge de Lorentz).

Ahora el metodo de cuantización canonico conduce a:

$$[A_\mu(\bar{x},t), \pi^\nu(\bar{x}',t)] = i\delta_\mu^\nu \delta^3(\bar{x}-\bar{x}') \longrightarrow [A^\mu(\bar{x},t), \pi^\nu(\bar{x}',t)] = i g^{\mu\nu} \delta^3(\bar{x}-\bar{x}')$$

(Los demás nulos) (Ahora no hay ningún problema).

- Descomposición Fourier ($\lambda=1$)

Escogemos una base de 4 cuadrivectores $\varepsilon^{(\lambda)}(k)$ ($\lambda=0,1,2,3$) en el esp. de Minkowski, tales que:

$$\varepsilon^{(\lambda)}(k) \cdot \varepsilon^{(\lambda')*}(k) = g^{\lambda\lambda'} \ , \quad \sum_\lambda g^{\lambda\lambda} \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k) \varepsilon_\nu^{(\lambda)*}(k) = g_{\mu\nu}$$

(En realidad los tomaremos reales: $\varepsilon^{(\lambda)*} = \varepsilon^{(\lambda)}$ $\longrightarrow$ vectores de polarización lineal)

Por ejemplo:

$$\varepsilon^{(0)} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \varepsilon^{(1)} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \varepsilon^{(2)} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \varepsilon^{(3)} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Entonces, en el gauge de Feynman ($\lambda=1$):

$$\Box A_\mu(x) = 0 \longrightarrow \boxed{A_\mu(x) = \int \frac{d^3\bar{k}}{(2\pi)^3 2\omega_{\bar{k}}} \sum_{\lambda=0}^{3} \left[a^{(\lambda)}(k) \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k) e^{-ikx} + a^{+(\lambda)}(k) \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k) e^{ikx} \right]}$$

$\lambda=0 \rightarrow$ polarización temporal
$\lambda=1,2 \rightarrow$ polarizaciones transversas ($\perp \bar{k}$)
$\lambda=3 \rightarrow$ polarización longitudinal ($\parallel \bar{k}$)

Puede demostrarse que:

$$[a^{(\lambda)}(k), a^{+(\lambda')}(k')] = -g^{\lambda\lambda'} 2\omega_{\bar{k}} (2\pi)^3 \delta^3(\bar{k}-\bar{k}')$$

Entonces:

$$\| a^{+(\lambda)}(k)|0\rangle \| \sim \langle 0 | a^{(\lambda)}(k) a^{+(\lambda)}(k') | 0 \rangle_{k' \to k} = \langle 0 | \underbrace{[a^{(\lambda)}(k), a^{+(\lambda)}(k')]}_{-g^{\lambda\lambda'} 2\omega_{\bar{k}} (2\pi)^3 \delta^3(\bar{k}-\bar{k}')} | 0 \rangle$$

Luego:

$\lambda=0 \rightarrow -g^{\lambda\lambda} = -1$ norma negativa
$\lambda=1,2,3 \rightarrow -g^{\lambda\lambda} = +1$ norma positiva

$\rightarrow$ "métrica indefinida"

Aparecen grados de libertad espurios. Definimos los estados (fotones) físicos $|\psi_{fis}\rangle$ como aquellos que satisfacen:

$$\boxed{\langle \psi_{fis} | \partial_\mu A^\mu(x) | \psi_{fis} \rangle = 0}$$

(gauge de Lorentz en valor medio).

Se demuestra que para los estados $|\psi_{fis}\rangle$, la contribución de los fotones temporales ($\lambda=0$) se cancela con la de los longitudinales ($\lambda=3$), de modo que sólo queda contribución de fotones transversos. Por tanto, en la práctica basta sustituir en la descomposición Fourier del campo:

$$\sum_{\lambda=0}^{3} \longrightarrow \sum_{\lambda=1,2}$$

• <u>Producto cronologicamente ordenado de campos</u>: $T\{A_\mu(x), A_\nu(y)\}$

$$T\{A_\mu(x), A_\nu(y)\} \equiv \Theta(x^0-y^0)A_\mu(x)A_\nu(y) + \Theta(y^0-x^0)A_\nu(y)A_\mu(x)$$

• <u>Propagador de Feynman</u>

Sea $\lambda \equiv 1$ (gauge de Feynman). Se demuestra que:

(sustituyendo $A_\mu(x)$ con $\lambda=1$)

$$G_{\mu\nu}(x-y) \equiv \langle 0|T\{A_\mu(x), A_\nu(y)\}|0\rangle = i g_{\mu\nu} G_F(x-y)\Big|_{m^2=0}$$

siendo:

$$G_F(x-y)\Big|_{m^2=0} \equiv i\langle 0|T(\phi(x),\phi^+(y))|0\rangle\Big|_{m^2=0} = \frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^4k \, \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2+i\epsilon}$$

(ya visto)

Entonces:

$$\Box_x G_{\mu\nu}(x-y) = i g_{\mu\nu} \Box_x G_F(x-y)\Big|_{m^2=0} = i g_{\mu\nu}\delta^4(x-y) \rightarrow$$

$\rightarrow G_{\mu\nu}(x-y)$ es una func. de Green;

$$\boxed{G_{\mu\nu}(x-y) = \frac{-i}{(2\pi)^4}\int d^4k \, e^{-ik(x-y)} \frac{g_{\mu\nu}}{k^2+i\epsilon}}$$

• <u>Caso $\lambda \neq 1$</u>

$$0 = \Box A^\mu - (1-\lambda)\partial^\mu(\partial_\rho A^\rho) = \left[\Box_x g^\mu{}_\nu - (1-\lambda)\partial^\mu\partial_\nu\right]A^\nu(x)$$

La func. de Green $G_{\mu\nu}$ ahora satisface:

$$\left[\Box_x g^\mu{}_\nu - (1-\lambda)\partial^\mu\partial_\nu\right]G_{\mu\nu}(x-y) = i g^{\mu\rho}\delta^4(x-y)$$

Se obtiene:

$$G^{\mu\nu}(x-y) = -i\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)}\left\{\frac{g^{\mu\nu}}{k^2+i\epsilon} - \left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\frac{k^\mu k^\nu}{(k^2+i\epsilon)^2}\right\}$$

Para $\lambda=1$ se recupera el resultado anterior.

CAMPO DE DIRAC (ESPINORIAL) LIBRE

- **Ecuación de Dirac:** $i\frac{\partial\psi}{\partial t}=H\psi$, $H=\beta m - i\vec{\alpha}\vec{\nabla}$; $\beta\equiv\begin{pmatrix}\mathbb{1} & 0\\ 0 & -\mathbb{1}\end{pmatrix}$, $\alpha^i\equiv\begin{pmatrix}0 & \sigma^i\\ \sigma^i & 0\end{pmatrix}$

Definimos: $\{\gamma^\mu;\ \mu=0,1,2,3\}$ ($\sigma^i \to$ Matrices de Pauli)

$\gamma^0\equiv\beta$, $\gamma^i\equiv\beta\alpha^i=\begin{pmatrix}0 & \sigma^i\\ -\sigma^i & 0\end{pmatrix}$ $\to$ "representación de Dirac"

Se verifica: $(\gamma^0)^2=\mathbb{1}$, $(\gamma^i)^2=-\mathbb{1}$, $\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=2g^{\mu\nu}$

- **Forma manifiestamente covariante de la ec. de Dirac:**

$$i\partial_t\psi+i\vec{\alpha}\vec{\nabla}\psi-\beta m\psi=0 \to (i\partial_0+i\alpha^j\partial_j-\beta m)\psi=0 \xrightarrow{\times\gamma^0} (i\gamma^0\partial_0+i\gamma^j\partial_j-m)\psi=0 \to$$

$$\to (i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi(x)=0 \to \boxed{(i\not{\partial}-m)\psi(x)=0}$$

(ec. diferencial 1^er orden)

También; definiendo: $\boxed{\bar{\psi}(x)\equiv\psi^+(x)\gamma^0}$

Entonces, tomando la adjunta de la ec. de Dirac, multiplicando por γ^0 y usando que $\gamma^{\mu+}=\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$, encontramos:

$$i\partial_\mu\bar{\psi}\,\gamma^\mu+m\bar{\psi}=0 \to \boxed{\bar{\psi}(x)(i\overleftarrow{\not{\partial}}+m)=0}$$

Consideraremos ψ y $\bar{\psi}$ como campos independientes.

- **Densidad lagrangiana:**

$$\mathcal{L}=\frac{i}{2}[\bar{\psi}(x)\gamma^\mu(\partial_\mu\psi(x))-(\partial_\mu\bar{\psi}(x))\gamma^\mu\psi(x)]-m\bar{\psi}\psi=$$

$$=\frac{i}{2}\bar{\psi}\overleftrightarrow{\not{\partial}}\psi-m\bar{\psi}\psi=\boxed{\bar{\psi}\left(\frac{i}{2}\overleftrightarrow{\not{\partial}}-m\right)\psi=\mathcal{L}}$$

$a\overleftrightarrow{\not{\partial}}b=a(\not{\partial}b)-(\not{\partial}a)b$

Se puede demostrar que: $\mathcal{L}=\bar{\psi}(i\not{\partial}-m)\psi-\frac{i}{2}\underbrace{\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)}_{\partial_\mu J^\mu}$ $\to$ $\boxed{\mathcal{L}=\bar{\psi}(i\not{\partial}-m)\psi}$

$\partial_\mu J^\mu \to$ cuadricorriente (no afecta a las ecs. de mov.)

De las densidades lagrangianas anteriores podemos obtener las ecs. de mov.

- **Soluciones independientes de la ec. de Dirac libre**

1) $\psi^{(+)}(x)\equiv e^{-ikx}u(k)$, con $k\equiv(k^0,\vec{k})$, $k^0\equiv+\sqrt{\vec{k}^2+m^2}>0$ $(kx=k^0x^0-\vec{k}\vec{x})$

es una solución de la ec. de Dirac: $(i\not{\partial}-m)\psi^{(+)}(x)=0$, con $E>0$, siempre que el cuadriespinor $u(k)$ satisfaga: $\boxed{(\not{k}-m)u(k)=0}$ $(\not{k}\equiv k_\mu\gamma^\mu=k^\mu\gamma_\mu)$

2) $\psi^{(-)}(x)\equiv e^{ikx}v(k)$

es una solución de la ec. de Dirac con $E<0$, siempre que el cuadriespinor $v(k)$ satisfaga: $\boxed{(\not{k}+m)v(k)=0}$

Los espinores conjugados $\bar{u}\equiv u^+\gamma^0$ y $\bar{v}\equiv v^+\gamma^0$ satisfacen: $\to$ $\boxed{\begin{array}{l}\bar{u}(k)(\not{k}-m)=0\\ \bar{v}(k)(\not{k}+m)=0\end{array}}$

- Puede comprobarse que sólo hay 2 soluciones indep. de la ec. $(\not{k}-m)u(k)=0$, que se puedan escribir como:

$u^{(1)}\to E>0\uparrow$

$u^{(2)}\to E>0\downarrow$

$$u^{(\alpha)}(k)=\begin{pmatrix}\sqrt{m+k^0}\,\mathbb{1}\varphi_0^{(\alpha)}\\ \frac{\vec{k}\cdot\vec{\sigma}}{\sqrt{m+k^0}}\varphi_0^{(\alpha)}\end{pmatrix};\quad \varphi_0^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\quad \varphi_0^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$(\alpha=1,2)$ $\vec{\sigma}\equiv(\sigma^1,\sigma^2,\sigma^3)$ (mat. Pauli)

También:

$$v^{(\alpha)}(k) = \begin{pmatrix} \dfrac{\vec{k}\cdot\vec{\sigma}}{\sqrt{m+k^0}}\varphi_0^{(\alpha)} \\ \sqrt{m+k^0}\,\mathbb{1}\varphi_0^{(\alpha)} \end{pmatrix} \; ; \qquad \begin{matrix} v^{(1)} \to E<0 \uparrow \\ v^{(2)} \to E<0 \downarrow \end{matrix}$$

$(\alpha=1,2)$

- Relaciones de normalización

$$\bar{u}^{(\alpha)}(k)u^{(\beta)}(k) = 2m\delta_{\alpha\beta} \;, \qquad \bar{u}^{(\alpha)}(k)v^{(\beta)}(k) = 0$$
$$\bar{v}^{(\alpha)}(k)v^{(\beta)}(k) = -2m\delta_{\alpha\beta} \;, \qquad \bar{v}^{(\alpha)}(k)u^{(\beta)}(k) = 0$$

$$u^{(\alpha)+}(k)u^{(\beta)}(k) = \bar{u}^{(\alpha)}(k)\gamma^0 u^{(\beta)}(k) = 2k^0\delta_{\alpha\beta} \; ; \; v^{(\alpha)+}(k)v^{(\beta)}(k) = \bar{v}^{(\alpha)}(k)\gamma^0 v^{(\beta)}(k) = 2k^0\delta_{\alpha\beta}$$

Además:

$$\sum_{\alpha=1,2} u^{(\alpha)}(k)\bar{u}^{(\alpha)}(k) = (\not{k}+m) \equiv \Lambda_+(k)$$
$$\sum_{\alpha=1,2} v^{(\alpha)}(k)\bar{v}^{(\alpha)}(k) = (\not{k}-m) \equiv \Lambda_-(k)$$

$\Lambda_+(k)$ y $\Lambda_-(k)$ son proyectores sobre estados de $E>0$ y $E<0$, respectivamente. En efecto:
Sea ω un cuadriespinor arbitrario, entonces $(\not{k}+m)\omega$ satisface:

$$(\not{k}-m)(\not{k}+m)\omega = (\not{k}^2-m^2)\omega = (k^2-m^2)\omega = 0$$

$$\not{k}^2 = k_\mu\gamma^\mu k_\nu\gamma^\nu = k_\mu k_\nu \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu) = \frac{1}{2}k_\mu k_\nu \underbrace{\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}}_{2g^{\mu\nu}} =$$
$$= g^{\mu\nu}k_\mu k_\nu = k^2$$

Luego, $(\not{k}+m)\omega$ satisface la ec. de los cuadriespinores de energía positiva.
Para $\Lambda_-(k)$ se demuestra de forma similar.

- Descomposición Fourier del campo

$$\boxed{\begin{aligned} \psi(x) &= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}}} \sum_{\lambda=1}^{2} \left[b^{(\lambda)}(k)u^{(\lambda)}(k)e^{-ikx} + d^{+(\lambda)}(k)v^{(\lambda)}(k)e^{ikx} \right] \\ \bar{\psi}(x) &= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}}} \sum_{\lambda=1}^{2} \left[d^{(\lambda)}(k)\bar{v}^{(\lambda)}(k)e^{-ikx} + b^{+(\lambda)}(k)\bar{u}^{(\lambda)}(k)e^{ikx} \right] \end{aligned}}$$

$\bar{\psi} \equiv \psi^+\gamma^0 \; ; \; \bar{u} \equiv u^+\gamma^0 \; ; \; \bar{v} \equiv v^+\gamma^0$

$b^{+(\lambda)}(k) \to$ crea un e^- de cuadrimomento k^μ $(k^2=m^2)$ y helicidad λ $(s=1/2)$

$d^{+(\lambda)}(k) \to$ crea un e^+ de cuadrimomento k^μ $(k^2=m^2)$ y helicidad λ $(s=1/2)$

- Momento canónico del campo:

$$\pi(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi)} = i\bar{\psi}\gamma^0 = i\psi^+(x)$$
$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{\partial}-m)\psi$$

- Cuantización canónica de campos fermiónicos

Para ser consistentes con la estadística de Fermi-Dirac ahora hay que usar anticonmutadores

$$i\{\psi_a(\vec{x},t), \psi_b^+(\vec{x}',t)\} = i\delta_{ab}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}') \qquad \text{(los demás nulos)}$$

De aquí se puede demostrar que:

$$\{b^{(\lambda)}(q), b^{+(\lambda')}(k)\} = (2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}}\delta^{\lambda\lambda'}\delta^3(\vec{k}-\vec{q})$$
$$\{d^{(\lambda)}(q), d^{+(\lambda')}(k)\} = (2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}}\delta^{\lambda\lambda'}\delta^3(\vec{k}-\vec{q})$$

(los demás nulos)

- Cuadrimomento del campo:

$$P^\mu = \int d^3\vec{x}\,\Theta^{\mu 0} = \int d\tilde{k}\, k^\mu \sum_{\lambda=1}^{2} \left[b^{+(\lambda)}(k)b^{(\lambda)}(k) - \underbrace{d^{(\lambda)}(k)d^{+(\lambda)}(k)}_{\{d^{(\lambda)}(k),d^{+(\lambda)}(k)\}-d^{+(\lambda)}(k)d^{(\lambda)}(k)} \right]$$

$$\langle 0|P^\mu|0\rangle = -\langle 0|\int d\tilde{k}\, k^\mu \sum_{\lambda=1}^{2} \underbrace{\{d^{(\lambda)}(k), d^{+(\lambda)}(k)\}}_{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}}\, \delta^3(\vec{0}) \to \infty} |0\rangle$$

Entonces: $(\omega_{\vec{k}} = \sqrt{\vec{k}^2+m^2}$ par en $\vec{k})$

$\langle 0|P^j|0\rangle = 0$ (por ser el integrando impar)

$\langle 0|P^0|0\rangle \to \infty$ (integrando par y divergente)

- Definimos un nuevo P^μ:

$$P^\mu \equiv P^\mu - \langle 0|P^\mu|0\rangle \equiv :\int d\tilde{k}\, k^\mu \sum_{\lambda=1}^{2} [b^{+(\lambda)}(k) b^{(\lambda)}(k) - d^{(\lambda)}(k) d^{+(\lambda)}(k)]: \equiv$$

$$\equiv \int d\tilde{k}\, k^\mu \sum_{\lambda=1}^{2} [b^{+(\lambda)}(k) b^{(\lambda)}(k) + d^{+(\lambda)}(k) d^{(\lambda)}(k)]$$

Definiremos cualquier magnitud física respecto de su valor medio en el vacío. Esta operación es equivalente a tomar el producto normal o de Wick de los operadores.

- Ordenación de Wick o normal de operadores fermiónicos:

consiste en situar los op. de aniquilación a la derecha, anticonmutándolos cuando sea necesario.

$:dd^+: = -d^+d$

$:bb^+: = -b^+b$

$:b^+b - dd^+: = b^+b + d^+d$

- Invariancia de $\mathcal{L}$ bajo U(1) $\qquad \mathcal{L} = \bar{\psi}(\frac{i}{2}\overleftrightarrow{\partial\!\!\!/} - m)\psi$

$\mathcal{L}$ es invariante bajo transformaciones de U(1):

$$\left[\begin{array}{l} \psi(x) \to e^{-i\theta}\psi(x) \xrightarrow{\text{t. inf.}} (1-i\epsilon)\psi(x) \xrightarrow{\text{generador}} F = -i\psi \\ \bar{\psi}(x) \to e^{i\theta}\bar{\psi}(x) \xrightarrow{\text{t. inf.}} \bar{\psi}(x)(1+i\epsilon) \longrightarrow \bar{F} = i\bar{\psi} \end{array}\right.$$

Cantidades conservadas (Th. Noether)

$$J^\mu = :\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}(-i\psi) + (i\bar{\psi})\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}: = :\frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu(-i\psi) - \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu i\psi: = :\bar{\psi}\gamma^\mu\psi: \qquad (\partial_\mu J^\mu = 0)$$

$$Q = :\int d^3\vec{x}\, J^0: = :\int d^3\vec{x}\, \bar{\psi}\gamma^0\psi: = \int d\tilde{k} \sum_{\lambda=1}^{2} [b^{+(\lambda)}(k) b^{(\lambda)}(k) - d^{+(\lambda)}(k) d^{(\lambda)}(k)] = \sum_{\lambda=1}^{2} \int d\tilde{k}\, [N_b^{(\lambda)}(k) - N_d^{(\lambda)}(k)]$$

$$Q = (+1) N_b + (-1) N_d \qquad (dQ/dt = 0)$$

carga (+1) en unidades de la carga del electrón

Se demuestra que: $[Q, b^{+(\lambda)}(k)] = b^{+(\lambda)}(k)$, $\quad [Q, d^{+(\lambda)}(k)] = -d^{+(\lambda)}(k)$

Sea $|e\rangle$ / $Q|e\rangle = e|e\rangle$: $\quad Q\, b^{+(\lambda)}(k)|e\rangle = (e+1)\, b^{+(\lambda)}(k)|e\rangle \quad \lambda = 1,2$

$Q\, d^{+(\lambda)}(k)|e\rangle = (e-1)\, d^{+(\lambda)}(k)|e\rangle$, etc.

- Producto cronologicamente ordenado de op. fermiónicos

$$T\{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\} \equiv \Theta(x^0-y^0)\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y) - \Theta(y^0-x^0)\bar{\psi}_b(y)\psi_a(x)$$

- Propagador de Feynman $S_F(x-y)$

Puede demostrarse que:
$$S_F(x-y)_{ab} \equiv -i\langle 0|T\{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\}|0\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \left(\frac{1}{k\!\!\!/ - m + i\epsilon}\right)_{ab}$$

es una función de Green para la ec. de Dirac

Nota:
$$\left(\frac{1}{k\!\!\!/ - m}\right)_{ab} = \left(\frac{(k\!\!\!/ + m)}{(k\!\!\!/ - m)(k\!\!\!/ + m)}\right)_{ab} = \frac{(k\!\!\!/ + m)_{ab}}{k^2 - m^2}$$