Scattering Compton

Vamos a estudiar el scattering elástico: $\gamma(k_1) + e^-(p_1) \longrightarrow \gamma(k_2) + e^-(p_2)$

$$|i\rangle = |p_1, \lambda_1, k_1, \sigma_1\rangle = b^{+(\lambda_1)}(p_1)\, a^{+(\sigma_1)}(k_1)\, |0\rangle$$

$$|f\rangle = |p_2, \lambda_2, k_2, \sigma_2\rangle = b^{+(\lambda_2)}(p_2)\, a^{+(\sigma_2)}(k_2)\, |0\rangle$$

Nos interesa calcular $\quad S_{fi}^{(2)} \equiv \langle f | S^{(2)} | i \rangle$

$$S_{fi}^{(2)} = \langle f | S^{(2)} | i \rangle = \frac{1}{2!} \int dx_1 dx_2\, i^2 \langle f | T\{ \mathcal{L}_I(x_1) \mathcal{L}_I(x_2) \} | i \rangle$$

$$= \frac{1}{2!} \int dx_1 dx_2\, i^2 \langle 0 | a(2) b(2) T\{ \mathcal{L}_I(x_1) \mathcal{L}_I(x_2) \} b^+(1) a^+(1) | 0 \rangle \qquad (1)$$

(NOTACION: $a(i) \equiv a^{(\sigma_i)}(k_i) \qquad b^+(j) \equiv b^{+(\lambda_j)}(p_j)$)

donde:

$$\mathcal{L}_I(x) = -:e\, \overline{\psi}(x) \not{A}\, \psi(x): \qquad (2)$$

$$S_{fi}^{(2)} = \frac{(+i\ )^2}{2!} \int dx_1 dx_2 \langle 0 | a(2) b(2) T\{ \mathcal{L}_I(x_1) \mathcal{L}_I(x_2) \} b^+(1) a^+(1) | 0 \rangle \qquad (3)$$

Y usando el Th. de Wick para desarrollar $T\{ \mathcal{L}_I(x_1) \mathcal{L}_I(x_2) \}$ vemos que los únicos elementos de matriz de $S_{fi}^{(2)}$ que pueden dar contribución no nula son los correspondientes a los diagramas ② y ③ del folio 132 (pues son los únicos que tienen dos campos externos fermiónicos y dos de fotones).

Entonces:

$$T\{ \mathcal{L}_I(x_1) \mathcal{L}_I(x_2) \} \sim :\gamma_\mu^{ab}\, \psi_b(x_1) A^\mu(x_1) \overline{\psi}_c(x_2) \gamma_\nu^{cd} A^\nu(x_2): \overline{\overline{\psi}_a(x_1) \psi_d(x_2)}$$

$$+ :\overline{\psi}_a(x_1) \gamma_\mu^{ab} A^\mu(x_1) \gamma_\nu^{cd} \psi_d(x_2) A^\nu(x_2): \overline{\psi_b(x_1) \overline{\psi}_c(x_2)}$$

$$(4)$$

Por otra parte sabemos que:

$$\overline{\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)} = \langle 0|T\{\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y)\}|0\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-ik(x-y)} \left(\frac{i}{\not{k}-m+i\epsilon}\right)_{ab} \quad (5)$$

– Vamos a considerar primero el primer término de (4):
Como ψ_a conmuta con A_μ, entonces:

$$:\psi_b(x_1)\bar{\psi}_c(x_2)A^\mu(x_1)A^\nu(x_2): \; = \; :\psi_b(x_1)\bar{\psi}_c(x_2)::A^\mu(x_1)A^\nu(x_2):$$

Por ejemplo: $d^+(1)\,a^+(2)\,b(2)\,a(1) =$

$$= d^+(1)\,b(2)\;\; a^+(2)\,a(1)$$

Hay que calcular:

$$\langle f|:\psi_b(x_1)\bar{\psi}_c(x_2)::A^\mu(x_1)A^\nu(x_2):|i\rangle \quad (6)$$

Y como:

$$|i\rangle = |p_1,\lambda_1,k_1,\sigma_1\rangle = |p_1,\lambda_1\rangle \otimes |k_1,\sigma_1\rangle$$
$$|f\rangle = |p_2,\lambda_2,k_2,\sigma_2\rangle = |p_2,\lambda_2\rangle \otimes |k_2,\sigma_2\rangle$$

el problema se reduce a calcular:

$$\langle k_2,\sigma_2|:A^\mu(x_1)A^\nu(x_2):|k_1,\sigma_1\rangle \quad (7)$$

$$\langle p_2,\lambda_2|:\psi_b(x_1)\bar{\psi}_c(x_2):|p_1,\lambda_1\rangle \quad (8)$$

Consideramos sólo fotones transversos porque los elementos de matriz, entre estados físicos, correspondientes a fotones no transversos se anulan.

$$\langle k_2,\sigma_2 | :A^\mu(x_1)A^\nu(x_2): | k_1,\sigma_1\rangle =$$

$$= \langle 0|\, a(2) \int d\tilde{k}_3 \int d\tilde{k}_4 \sum_{\sigma_3,\sigma_4=1}^{2} : \{ a(3)\epsilon^\mu(3)e^{-ik_3x_1} + a^+(3)\epsilon^\mu(3)e^{ik_3x_1} \} \times$$

$$\times \{ a(4)\epsilon^\nu(4)e^{-ik_4x_2} + a^+(4)\epsilon^\nu(4)e^{ik_4x_2} \} : a^+(1)\,|0\rangle \qquad (9)$$

Pero: $(9) \sim \underbrace{\langle 0|a_2a_3a_4a_1^+|0\rangle}_{0} + \langle 0|a_2a_4^+a_3a_1^+|0\rangle +$

$$+ \langle 0|a_2a_3^+a_4a_1^+|0\rangle + \underbrace{\langle 0|a_2a_3^+a_4^+a_1^+|0\rangle}_{0}$$

$$\langle 0|a_2a_4^+a_3a_1^+|0\rangle = (2\pi)^3\, 2k_1^0\, \delta^3(\vec{k}_1-\vec{k}_3)\,\delta_{\sigma_1\sigma_3}\langle 0|a_2a_4^+|0\rangle =$$

$$a_3a_1^+ = a_1^+a_3 + [a_3,a_1^+]$$

$$[a_3,a_1^+] = (2\pi)^3\, 2k_1^0\,\delta^3(\vec{k}_1-\vec{k}_3)\,\delta_{\sigma_1\sigma_3}$$

Ver (7) folio 104 y tener en cuenta que consideramos sólo fotones transversos ($\rightarrow \sigma_1,\sigma_3 = 1,2$), con lo cual: $-g^{\sigma_1\sigma_3} = \delta_{\sigma_1\sigma_3}$

$$= (2\pi)^3\, 2k_1^0\,\delta^3(\vec{k}_1-\vec{k}_3)\,\delta_{\sigma_1\sigma_3}\,(2\pi)^3\, 2k_2^0\,\delta^3(\vec{k}_2-\vec{k}_4)\,\delta_{\sigma_2\sigma_4}$$

$$\langle 0|a_2a_3^+a_4a_1^+|0\rangle = (2\pi)^3\, 2k_1^0\,\delta^3(\vec{k}_1-\vec{k}_4)\,\delta_{\sigma_1\sigma_4}(2\pi)^3 2k_2^0\,\delta^3(\vec{k}_2-\vec{k}_3)\,\delta_{\sigma_2\sigma_3}$$

Se obtiene del anterior cambiando $3 \leftrightarrow 4$.

Sustituyendo estas expresiones en (9) y usando las $\delta^3(\vec{k}-\vec{q})$ para evaluar las integrales encontramos:

$$\langle k_2\sigma_2 | : A^\mu(x_1) A^\nu(x_2) : | k_1\sigma_1\rangle = \epsilon^\mu(1)\epsilon^\nu(2)\, e^{-ik_1x_1+ik_2x_2} + $$
$$+ \epsilon^\mu(2)\epsilon^\nu(1)\, e^{ik_2x_1-ik_1x_2} \qquad (10)$$

Calculemos ahora (8):

$$\langle p_2\lambda_2 | : \psi_b(x_1)\bar\psi_c(x_2) : | p_1\lambda_1\rangle =$$

$$= \langle 0| b(2) \int d\tilde p_3 \int d\tilde p_4 : \sum_{\lambda_3,\lambda_4=1}^{2} \{ u_b(3) b(3) e^{-ip_3x_1} + v_b(3) d^+(3) e^{ip_3x_1} \} \times$$

$$\times \{ \bar v_c(4) d(4) e^{-ip_4x_2} + \bar u_c(4) b^+(4) e^{ip_4x_2} \} : b^+(1)|0\rangle \qquad (11)$$

Pero: $(11) \sim \underbrace{\langle 0| b_2 b_3 d_4 b_1^+ |0\rangle}_{0} - \langle 0| b_2 b_4^+ b_3 b_1^+ |0\rangle +$
$$+ \langle 0| b_2 d_3^+ d_4 b_1^+ |0\rangle + \underbrace{\langle 0| b_2 d_3^+ b_4^+ b_1^+ |0\rangle}_{0}$$

<u>NOTA IMPORTANTE</u>: Hemos usado que

$$: b(3)\, b^+(4) : = - b^+(4)\, b(3)$$

También: $\langle 0| b_2 d_3^+ d_4 b_1^+ |0\rangle = 0$ ya que d_4 y b_1^+ anticonmutan (al igual que b_2 y d_3^+):

$$\langle 0| b_2 d_3^+ d_4 b_1^+ |0\rangle =$$
$$- \langle 0| b_2 d_3^+ b_1^+ \underbrace{d_4 |0\rangle}_{0} = 0$$

Entonces:

$$(11) \sim - \langle 0| b_2 b_4^+ b_3 b_1^+ |0\rangle = -(2\pi)^6 \delta^3(\vec p_2 - \vec p_4)\, \delta^3(\vec p_1 - \vec p_3) \times$$
$$\times 2p_1^0\, 2p_2^0\, \delta_{\lambda_2\lambda_4}\, \delta_{\lambda_1\lambda_3}$$

$$b_3 b_1^+ = -b_1^+ b_3 + \{b_3, b_1^+\} \sim \{b_3, b_1^+\} = (2\pi)^3\, 2p_1^0\, \delta_{\lambda_1\lambda_3}\, \delta^3(\vec p_1 - \vec p_3)$$

sustituyendo en (11):

$$\langle p_2\lambda_2 | :\psi_b(x_1)\overline{\psi}_c(x_2): | p_1\lambda_1\rangle = -u_b(1)\,\overline{u}_c(2)\,e^{-ip_1x_1+ip_2x_2} \qquad (12)$$

En cuanto al segundo término de (4) no es difícil ver que se obtiene del primero intercambiando $x_1 \leftrightarrow x_2$. Pero como en la Ec. (3) x_1 y x_2 son variables mudas de integración, resulta que ese segundo término da exactamente la misma contribución que el primero: el resultado final es que desaparece el factor $1/2!$ en la expresión de $S_{fi}^{(2)}$.

Ya hemos tenido en cuenta la contribución del 2º término de (4) (quitando el factor $1/2!$)

Entonces sustituyendo (12), (10) y (5) en (3):

$$\overline{\psi}_a(x_1)\psi_d(x_2) = -\psi_d(x_2)\overline{\psi}_a(x_1)$$

$$\langle f|S^{(2)}|i\rangle = (-ie)^2\int dx_1\int dx_2 \left\{+u_b(1)\,\overline{u}_c(2)\,e^{-ip_1x_1+ip_2x_2}\right\}\gamma_\mu^{ab}\gamma_\nu^{cd}\times$$

$$\times\left\{\epsilon^\mu(1)\epsilon^\nu(2)e^{-ik_1x_1+ik_2x_2}+\epsilon^\mu(2)\epsilon^\nu(1)e^{ik_2x_1-ik_1x_2}\right\}\times$$

$$\times\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ik(x_2-x_1)}\left(\frac{i}{\not k-m}\right)_{da} \qquad (13)$$

Pero:

$$\int d^4x_1\, e^{-ip_1x_1-ik_1x_1+ikx_1} = (2\pi)^4\delta^4(p_1+k_1-k)$$

etc.

$$\langle f|S^{(2)}|i\rangle = (-ie)^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\int dx_1\int dx_2\left\{u_b(1)\overline{u}_c(2)\epsilon^\mu(1)\epsilon^\nu(2)\,e^{-ip_1x_1-ik_1x_1+ikx_1}\times\right.$$

$$\times e^{ip_2x_2+ik_2x_2-ikx_2}+u_b(1)\overline{u}_c(2)\epsilon^\mu(2)\epsilon^\nu(1)\,e^{-ip_1x_1+ik_2x_1+ikx_1}\times$$

$$\left.\times e^{ip_2x_2-ik_1x_2-ikx_2}\right\}\gamma_\mu^{ab}\gamma_\nu^{cd}\left(\frac{i}{\not k-m}\right)_{da} =$$

$$=(-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \; u_b(1)\, \bar{u}_c(2) \left\{ \epsilon^\mu(1)\,\epsilon^\nu(2)\,(2\pi)^8\, \delta^4(p_1+k_1-k)\,\delta^4(p_2+k_2-k) \, + \right.$$

$$\left. + \, \epsilon^\mu(2)\,\epsilon^\nu(1)\,(2\pi)^8\,\delta^4(p_1-k_2-k)\,\delta^4(p_2-k_1-k) \right\} \gamma_\mu^{ab}\, \gamma_\nu^{cd} \left(\frac{i}{\not{k}-m}\right)_{da} \tag{14}$$

Pero,

$$\bar{u}_c(2)\,\gamma_\nu^{cd} \left(\frac{i}{\not{k}-m}\right)_{da} \gamma_\mu^{ab}\, u_b(1) = \bar{u}(2)\,\gamma_\nu \left(\frac{i}{\not{k}-m}\right) \gamma_\mu\, u(1)$$

Además,

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{i}{\not{k}-m}\right) \delta^4(p_1+k_1-k)\,\delta^4(p_2+k_2-k) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \left(\frac{i}{\not{p}_1+\not{k}_1-m}\right) \delta^4(p_2+k_2-p_1-k_1) \tag{15}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \left(\frac{i}{\not{p}_2+\not{k}_2-m}\right) \delta^4(p_1+k_1-p_2-k_2) \tag{16}$$

(Esta es otra posibilidad) (En realidad son iguales, la δ^4 asegura que $p_1+k_1 = p_2+k_2$).

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{i}{\not{k}-m}\right) \delta^4(p_1-k_2-k)\,\delta^4(p_2-k_1-k) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \left(\frac{i}{\not{p}_1-\not{k}_2-m}\right) \underbrace{\delta^4(p_2-k_1-p_1+k_2)}_{\shortparallel} \tag{17}$$

$$\delta^4(p_1+k_1-p_2-k_2)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \left(\frac{i}{\not{p}_2-\not{k}_1-m}\right) \delta^4(p_1-k_2-p_2+k_1) \tag{18}$$

Luego sustituyendo (15) y (17) en (14):

$$\langle f|S^{(2)}|i\rangle = (-ie)^2 \left\{ \bar{u}(2)\gamma_\nu \frac{i}{\not{p}_1+\not{k}_1-m} \gamma_\mu u(1)\, \epsilon^\mu(1)\, \epsilon^\nu(2)\, (2\pi)^4 \delta^4(p_1+k_1-p_2-k_2) \right.$$

$$\left. + \bar{u}(2)\gamma_\nu \frac{i}{\not{p}_1-\not{k}_2-m} \gamma_\mu u(1)\, \epsilon^\mu(2)\, \epsilon^\nu(1)\, (2\pi)^4 \delta^4(p_1+k_1-p_2-k_2) \right\}$$

Luego:

$$\langle f|S^{(2)}|i\rangle = i\,(2\pi)^4\, \delta^4(p_1+k_1-p_2-k_2)\, \langle f|T^{(2)}|i\rangle$$

donde:

$$i\,T^{(2)}_{fi} = (-ie)^2\, \bar{u}(2)\gamma_\nu \left\{ \frac{i}{\not{p}_1+\not{k}_1-m}\, \epsilon^\mu(1)\epsilon^\nu(2) + \frac{i}{\not{p}_1-\not{k}_2-m}\, \epsilon^\mu(2)\epsilon^\nu(1) \right\} \gamma_\mu u(1)$$