SECCIÓN EFICAZ Y RITMO DE DECAIMIENTO

Sea $\phi(x)$ un campo cuántico genérico: $\phi(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2p^0} \sum_\lambda \left(a_\lambda(p) e^{-ipx} + a_\lambda^\dagger(p) e^{ipx} \right)$

Estado de una partícula de cuadrimomento p y helicidad λ:

$$|p,\lambda\rangle = a_\lambda^\dagger(p)|0\rangle \qquad \left(P^\mu |p,\lambda\rangle = p^\mu |p,\lambda\rangle \right)$$

Supondremos los estados normalizados según:

(1) $\langle p',\lambda'|p,\lambda\rangle = (2\pi)^3 2p^0 \delta^{\lambda\lambda'} \delta^3(\vec{p}-\vec{p}') \qquad (\langle 0|0\rangle = 1)$

- Se puede demostrar (no lo haremos) que el nº de estados en el elemento de volumen del espacio de fases $d^3\vec{p}$ viene dado por: $\frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2p^0}$ (2)

y que la condición de normalización (1) equivale a normalizar 2E partículas por unidad de volumen ($E \equiv p^0$ = energía)

- La probabilidad de transición de $|i\rangle \to |f\rangle$ viene dada por:

$$W_{i\to f} = |T_{fi}|^2 = |\langle f|T|i\rangle|^2 \qquad (3)$$

(Probabilidad de que las $2P_i^0$ partículas por unidad de volumen que hay en $|i\rangle$ pasen al estado $|f\rangle$) ($P_i^0 \equiv$ Energía inicial total)

donde el operador T está definido por: $i\langle f|T|i\rangle \equiv \langle f|S|i\rangle - \langle f|\mathbb{1}|i\rangle$

Notar que $\langle f|\mathbb{1}|i\rangle = \langle f|i\rangle \neq 0$ sólo si $|f\rangle = |i\rangle$. Por tanto aquellos procesos en los que el estado final coincida con el inicial sólo son tenidos en cuenta por el operador T "si por el medio ha ocurrido algo"; si no ha ocurrido nada ($\to$ lo que corresponde al operador $\mathbb{1}$) no se tienen en cuenta (de ahí que se reste la contribución correspondiente).

Puesto de otra forma, vemos que:

$$S = \mathbb{1} + iT \qquad T \to \text{operador de transición}$$

$\mathbb{1}$: corresponde a procesos en los que no pasa nada

iT: contribución correspondiente a procesos en los que algo ha ocurrido (al menos por el medio)

Definimos el "operador de transición reducido" $\mathcal{T}$ según:

$$\mathcal{T} \;/\; \langle f|T|i\rangle \equiv (2\pi)^4 \underbrace{\delta^4(P_f - P_i)}_{\text{Refleja de forma manifiesta la (necesaria) conservación del cuadrimomento total en el proceso } |i\rangle \to |f\rangle} \langle f|\mathcal{T}|i\rangle \qquad (4)$$

Calculemos $[\delta^4(P_f-P_i)]^2$: (usaremos un procedimiento rápido no muy riguroso: existen otras posibilidades más elegantes y costosas)

(5) $\delta^4(P_f-P_i)\cdot\delta^4(P_f-P_i) = \delta^4(P_f-P_i)\cdot\delta^4(0) =$

$$= \delta^4(P_f-P_i) \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x$$

$\delta^4(p) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4x\, e^{ipx}$

$\int d^4x$ es el volumen del espacio-tiempo, que escribimos como $V\cdot t$ (volumen × tiempo) considerando que $V\to\infty$, $t\to\infty$.

Entonces, usando (4) y (5), la ec. (3) queda:

$$W_{i\to f} = (2\pi)^4\, \delta^4(P_f-P_i)\; V\cdot t\; |\langle f|\mathcal{T}|i\rangle|^2 \qquad (6)$$

Supongamos que en el estado inicial tenemos partículas "1" que colisionan con partículas blanco "2" (que suponemos en reposo): $1 \bullet\!\longrightarrow \quad \bullet 2$

Como hemos visto, según la normalización escogida, el número de partículas blanco por unidad de volumen (dn_2/dV) será:

$$\frac{dn_2}{dV} = 2p_2^0 \overset{\text{(están en reposo)}}{=} 2m_2$$

luego: $dn_2 = 2\underbrace{m_2}_{\text{masa de las partículas blanco.}}\, dV$ (7)

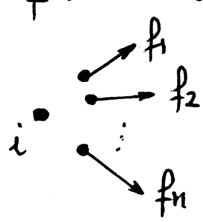
Entonces, la probabilidad de transición de $|i\rangle \to |f\rangle$ por unidad de tiempo y de partículas blanco vendrá dada por:

$$\frac{dW_{i\to f}}{dt\, dn_2} \underset{(6),(7)}{=} \frac{1}{2m_2}(2\pi)^4\, \delta^4(P_f-P_i)\, |\langle f|\mathcal{T}|i\rangle|^2 \qquad (8)$$

RITMO DE DECAIMIENTO

Supongamos que en el estado inicial tenemos partículas "i" que decaen en n partículas ($f_1, f_2, \ldots, f_n$): $|i\rangle \longrightarrow |f_1, f_2, \ldots, f_n\rangle$:

(las partículas "i" se suponen en reposo)



El ritmo de decaimiento se define como la probabilidad de transición de $|i\rangle \to |f_1, \ldots, f_n\rangle$ por unidad de tiempo y de partículas que decaen:

$$d\Gamma(i\to f) \equiv \frac{dW_{i\to f}}{dt\, dn_i} = \frac{1}{2m_i}(2\pi)^4\, \delta^4(P_f-P_i)\, |\langle f_1,\ldots,f_n|\mathcal{T}|i\rangle|^2 \prod_{k=1}^{n} \frac{d^3\vec{p}_{f_k}}{(2\pi)^3\, 2p_{f_k}^0} \qquad (9)$$

$dn_i = 2m_i\, dV \qquad P_i = \begin{pmatrix} m_i \\ \vec{p}_i = \vec{0} \end{pmatrix}, \quad P_f = \sum_{k=1}^{n} p_{f_k}$

(cuadrimomento total inicial (i) o final (f)).

Los factores finales de (9) $\left(\prod_k d^3\vec{p}_{f_k}/(2\pi)^3 2p_{f_k}^0\right)$ son debidos a que los momentos lineales están distribuidos de forma continua de modo que de lo que podemos hablar es de la probabilidad de encontrar al final la partícula "f_1" con momento en el elemento de volumen $d^3\vec{p}_{f_1}$ (la cual será proporcional al nº de estados que hay en ese elemento de volumen, que viene dado por la ec. (2)), la partícula "f_2" con momento comprendido en el elemento de volumen $d^3\vec{p}_{f_2}$ etc...

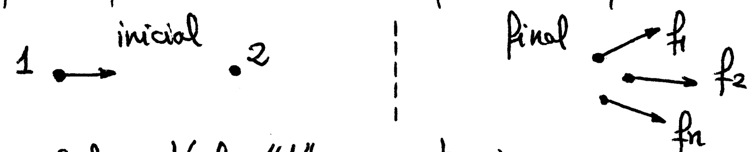
La probabilidad total de decaimiento por unidad de t (i.e. sean cuales sean los momentos finales) será:

$$\Gamma(i\to f) = \int d\Gamma(i\to f) \qquad (10)$$

y el tiempo de vida de la partícula "i" será: $\tau = 1/\Gamma$ (11)

SECCIÓN EFICAZ DIFERENCIAL DE SCATTERING

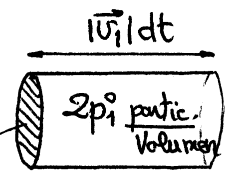
Supongamos que en el estado inicial tenemos partículas "1" que colisionan con partículas blanco "2" (en reposo), para dar un estado final en el que tenemos partículas "f_1", ..., "f_n":



El flujo incidente $d\phi_i$ (= nº de partículas "1" que atraviesan perpendicularmente la unidad de area por unidad de t) será:

(12) $$d\phi_i = \frac{|\vec{v}_1|dt \times 2p_1^0}{dt} = 2v_1 p_1^0 = 2\gamma v_1 m_1$$

$v_1 = |\vec{v}_1|$ Area $S=1$



Volumen $= |\vec{v}_1|\, dt\, \overset{1}{\overset{\shortparallel}{S}}$

$$\left[\begin{array}{l} p_1^0 = E_1 = \dfrac{m_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \equiv \gamma m_1 \qquad (\gamma \equiv 1/\sqrt{1-\beta^2}) \quad (\beta = v) \\ |\vec{p}_1| = \dfrac{m_1}{\sqrt{1-\beta^2}}|\vec{v}_1| \longrightarrow |\vec{p}_1| = \gamma |\vec{v}_1|\, m_1 \qquad (13) \end{array}\right.$$

Entonces de (12): $d\phi_i = 2|\vec{p}_1|$ (14)

La sección eficaz diferencial de scattering se define como la probabilidad de transición de $|i_1,i_2\rangle \longrightarrow |f_1,f_2,\dots,f_n\rangle$ por unidad de tiempo, de partícula blanco y de flujo incidente:

$dn_2 = 2m_2 dV$, $d\phi_i = 2|\vec{p}_1|$ (14)

(15) $$d\sigma(i\to f) = \frac{dW_{i\to f}}{dt\, dn_2\, d\phi_i} = \frac{1}{4m_2|\vec{p}_1|}(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i)|\langle f_1,\dots,f_n|\mathcal{T}|i_1 i_2\rangle|^2 \prod_{k=1}^{n} \frac{d^3\vec{p}_{f_k}}{(2\pi)^3 2p_{f_k}^0}$$

$P_i = p_1 + p_2$

$P_f = \sum_k p_{f_k}$

conviene reescribir $4m_2|\vec{p}_1|$ en forma manifiestamente covariante:

$$4m_2|\vec{p}_1| = 4\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}$$

$$\left[\begin{array}{l} p_1\cdot p_2 = (\gamma m_1, \vec{p}_1)\cdot(m_2,\vec{0}) = \gamma m_1 m_2 \\ \sqrt{(p_1\cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} = \sqrt{\gamma^2-1}\; m_1 m_2 = \dfrac{v_1}{\sqrt{1-v_1^2}} m_1 m_2 = \underbrace{\gamma m_1 v_1}_{\overset{(13)}{=}\,|\vec{p}_1|} m_2 \end{array}\right.$$

también conviene escribir:

$$d^3\vec{p}_{f_k} = |\vec{p}_{f_k}|^2 d|\vec{p}_{f_k}|\, d\Omega_{f_k}$$

(angulo sólido)