ANALES DE FISICA Serie A Vol. 87 1991

INTERACCION DE PARTICULAS DE ALTA ENERGIA CON UN POTENCIAL ESCALAR: EXTENSION DEL FORMALISMO EIKONAL

V. DELGADO
Departamento de Física Fundamental y Experimental
Universidad de La Laguna. 38203 La Laguna. Tenerife.

Recibido el 26 de Septiembre de 1990

Abstract .-

Starting from the Dirac equation, the scattering of high energy particles by scalars potentials is studied by using an approximation which takes into account the contribution of processes of virtual pairs creation. This approximation represents an extension of the eikonal formalism. It is shown that for heavy particles scattered by smooth scalar potentials the scattering amplitude becomes, to a good approximation, of eikonal type.

1. Introducción .-

A partir del método de aproximación de Glauber (1), quién estudió el scattering por un potencial de partículas no relativistas de alta energía utilizando aproximaciones relacionadas con el método eikonal de la óptica, fueron desarrollados nuevos métodos de aproximación que vienen a ser generalizaciones relativistas (2,3) del primero, y que como aquél tienen la importancia de conducir a resultados de tipo eikonal.

Sin embargo, dado que en un problema de colisión la energía queda fijada de antemano, estos métodos, que parten de la ecuación de Dirac independiente del tiempo, no permiten la mezcla de componentes de energía positiva y negativa, de modo que la amplitud de scattering a que dan lugar resulta ser una aproximación en la que se desprecia la contribución de los procesos de creación de pares virtuales. Por lo tanto, sólo serán aplicables cuando dicha contribución sea en efecto despreciable, como ocurre en el caso ampliamente estudiado (2-5) del scattering de particulas de muy alta energía por potenciales electrostáticos. Sin embargo, como cabía esperar, en el caso pseudoescalar fallan los métodos eikonales usuales (4,6).

En este trabajo estudiamos la dispersión de partículas de Dirac de alta energía por potenciales de tipo escalar. Este tipo de potenciales pueden jugar un papel importante en versiones fenomenológicas del modelo de quarks (7). Estamos interesados en determinar bajo qué circunstancias es posible despreciar la contribución al scattering de los procesos de creación de pares virtuales, lo que permitiría manejar expresiones de tipo eikonal.

II. Scattering por un Potencial Escalar .-

Partimos de la ecuación de Dirac en un potencial arbitrario que varía suavemente en un espacio-tiempo (apéndice A)

$$\left[i\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha_z \frac{\partial}{\partial z} + \vec{\alpha}_\perp \nabla_\perp\right) - \beta m\right]\varphi = \beta V\varphi \qquad /1/$$

cuya solución, para el proceso de scattering de una partícula incidente con momento p en la dirección del eje z positivo y energía $E \longrightarrow \infty$, escribimos en la forma

$$\varphi = e^{i(pz-Et)}\phi_+ + e^{i(pz+Et)}\phi_- \equiv \varphi_{pos} + \varphi_{neg} \qquad /2/$$

donde los factores moduladores $\phi_\pm$ son cuadriespinores, función suavemente variable de las coordenadas espacio-temporales, y sometidos a las condiciones de contorno

$$\phi_-(t = -\infty) = 0$$
$$\phi_+(t = -\infty) = u \qquad /3/$$

siendo u_i el cuadriespinor libre que caracteriza el estado de spin de la partícula incidente.

La sustitución de la Ecuación /2/ en la Ecuación /1/ permite deducir las relaciones

$$\alpha_z\varphi_{pos} \approx \varphi_{pos}$$
$$\alpha_z\varphi_{neg} \approx -\varphi_{neg} \qquad /4/$$

Multiplicando la Ecuación /1/ por la izquierda por $(1+\alpha_z)$ y por $(1-\alpha_z)$, y teniendo en cuenta las Ecuaciones /4/ se obtiene, respectivamente

$$i\partial_+\varphi_{pos} + \left[\left(\vec{\Sigma}\wedge\vec{\nabla}\right)_z - \beta m\right]\varphi_{neg} = \frac{1}{2}(1+\alpha_z)\beta V\varphi \qquad /5/$$

$$i\partial_-\varphi_{neg} - \left[\left(\vec{\Sigma}\wedge\vec{\nabla}\right)_z + \beta m\right]\varphi_{pos} = \frac{1}{2}(1-\alpha_z)\beta V\varphi \qquad /6/$$

siendo

$$\partial_\pm \equiv \frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\left(\vec{\Sigma}\wedge\vec{\nabla}\right)_z \equiv \Sigma_x\frac{\partial}{\partial y} - \Sigma_y\frac{\partial}{\partial x}$$

Para el caso de un potencial escalar V=U, donde U representa el producto de la matriz unidad por una función escalar. Entonces, dado que $\alpha_z\beta = -\beta\alpha_z$ las Ecuaciones /5/ y /6/ quedan

$$i\partial_+\varphi_{pos} + \left[\left(\vec{\Sigma}\wedge\vec{\nabla}\right)_z - \beta m\right]\varphi_{neg} = \beta U\varphi_{neg} \qquad /7/$$

$$i\partial_-\varphi_{neg} - \left[\left(\vec{\Sigma}\wedge\vec{\nabla}\right)_z + \beta m\right]\varphi_{pos} = \beta U\varphi_{pos} \qquad /8/$$

La solución de la Ecuación /8/ puede escribirse formalmente:

$$\varphi_{neg} = (i\partial_-)^{-1}\left[\left(\vec{\Sigma}\wedge\vec{\nabla}\right)_z + \beta m + \beta U\right]\varphi_{pos} =$$
$$= (i\partial_-)^{-1}e^{i(pz-Et)}\left[\left(\vec{\Sigma}\wedge\vec{\nabla}\right)_z + \beta m + \beta U\right]\phi_+ =$$
$$= e^{i(pz-Et)}(i\partial_- + E + p)^{-1}\left[\left(\vec{\Sigma}\wedge\vec{\nabla}\right)_z + \beta m + \beta U\right]\phi_+ \qquad /9/$$

Teniendo en cuenta que tanto U como $\phi_\pm$ son funciones suavemente variables de las coordenadas espacio-temporales, en el límite de alta energía la ecuación anterior resulta ser

$$\varphi_{neg} \simeq \frac{1}{2E}\left[\left(\vec{\Sigma}\wedge\vec{\nabla}\right)_z + \beta m + \beta U\right]\varphi_{pos} \qquad /10/$$

y sustituyendo en la Ecuación /7/ se llega a

$$i\partial_+\phi_+ \simeq \frac{1}{2E}\left[2mU + U^2 - \beta\left\{\left(\vec{\Sigma}\wedge\vec{\nabla}\right)_z U\right\}\right]\phi_+ \qquad /11/$$

donde haciendo uso de que ϕ_+ varía suavemente hemos despreciado los términos que incluyen derivadas segundas.

En los casos en que sea posible despreciar la dependencia temporal del potencial, la solución de la ecuación anterior viene dada por la de la ecuación integral

$$\phi_+(\vec{x}) = u_i - \frac{i}{2E}\int_{-\infty}^{z}\left[2mU + U^2 - \beta\left\{\left(\vec{\Sigma}\wedge\vec{\nabla}\right)_z, U\right\}\right]\phi_+ dz' \qquad /12/$$

cuya solución formal puede escribirse a su vez como un desarrollo de Neumann

$$\phi_+(\vec{x}) \equiv \left\{ \exp\left(- \frac{i}{2E} \cdot \int_{-\infty}^{z} dz' \left[2mU + U^2 - \beta \left\{ \left(\vec{\Sigma} \wedge \vec{\nabla} \right)_{z}, U \right\} \right] \right) \right\}_+ u_i \qquad /13/$$

A orden 1/E la exponencial ordenada anterior coincide con una exponencial simple, de modo que a este orden:

$$\varphi_{pos}(\vec{x},t) \simeq \exp\left(- \frac{i}{2E} \int_{-\infty}^{z} dz' \left[2mU + U^2 - \beta \left\{ \left(\vec{\Sigma} \wedge \vec{\nabla} \right)_{z}, U \right\} \right] \right) e^{i(pz-Et)} u_i \equiv \Psi_{pos}(\vec{x}) . e^{-iEt} \qquad /14/$$

Sin embargo, para potenciales suficientemente suaves, en los que el término derivativo en el potencial (que está relacionado con la interacción spin-órbita) sea despreciable frente a los otros dos, la exponencial ordenada de la Ecuación /13/ se reduce a una exponencial simple de manera que en este caso la Ecuación /14/ pasaría a ser válida a todos los órdenes.

Las aproximaciones de tipo eikonal son aquellas que conducen a expresiones de la amplitud de scattering relativista

$$F_{fi}(\Omega_f) = - \frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{x} \bar{\phi}_f(\vec{x}) \; V(\vec{x}) \; \Psi_{pos}(\vec{x}) \qquad /15/$$

$$\bar{\phi}_f(\vec{x}) \equiv e^{-i\vec{p}_f \vec{x}} \bar{u}^{(\eta)}(\vec{p}f)$$

en las que la dependencia en el potencial aparece sólo a través de factores exponenciales simples.

A partir de la Ecuación /14/ vemos que para el caso de un potencial escalar, la presente aproximación de alta energía será eikonal o no dependiendo de la importancia de la interacción tipo spin-órbita y de la relación entre la masa de la partícula y la magnitud del potencial: sólo en el caso de que el término lineal sea claramente dominante la aproximación será de tipo eikonal.

Si el potencial depende sólo de la distancia, la Ecuación /14/ se puede poner en la forma

$$\Psi_{pos}(\vec{x}) \simeq \exp\left(- \frac{i}{2E} \int_{-\infty}^{z} \left[2mU + U^2 \right] dz' \right) \cdot \left[\cos(gb) + i\beta\vec{\Sigma} \cdot \left(\frac{\vec{B}}{b} \wedge \vec{k} \right) \mathrm{sen}(gb) \right] e^{i\vec{p}_i\vec{x}} u_i \qquad /16/$$

$$g \equiv \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} dz'$$

donde los vectores $\vec{B}$ del plano de parámetros de impacto están contenidos en el plano perpendicular a la dirección del momento lineal incidente (caracterizada por el vector unitario $\vec{k}$).

Entonces, sustituyendo en la Ecuación /15/, la amplitud de scattering queda

$$F_{fi}(\Omega_f) = \bar{u}_f \left[- \frac{1}{4\pi} \int dz d^2b \; e^{i\vec{q}(\vec{B}+z\hat{k})} U(r) \cdot \exp\left(- \frac{i}{2E} \int_{-\infty}^{z} \left[2mU + U^2 \right] dz' \right) \times \left(\cos(gb) + i\beta\vec{\Sigma} \cdot \left(\frac{\vec{B}}{b} \wedge \hat{k} \right) \mathrm{sen}(gb) \right) \right] u_i \equiv \bar{u}_f \hat{F}_{fi} u_i \qquad /17/$$

donde $\vec{q} \equiv \vec{p}_i - \vec{p}_f$ es el momento transferido, y d^2b el elemento de área del plano de parámetros de impacto.

Teniendo en cuenta que el scattering a alta energía está básicamente concentrado en pequeños ángulos y haciendo uso de la simetría de revolución del potencial, la amplitud de scattering toma la forma final (válida sólo a orden 1/E):

$$F_{fi}(\theta) = \bar{u}_f \hat{F}_{fi} u_i = u_f^+ \left[\beta t_{fi} + (\vec{\Sigma} \cdot \hat{n}) \tau_{fi} \right] u_i \qquad /18/$$

donde

$$t_{fi}(\theta) \equiv -\frac{1}{2} \int_o^\infty J_o\left(2pb \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right) \cdot$$

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} dzU(r) \exp\left(-\frac{i}{2E}\int_{-\infty}^{z}\left[2mU + U^2\right]dz'\right) \quad x\right.$$

$$\left.\cos\left(\frac{b}{E}\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{r}\frac{dU}{dr}dz'\right)\right] bdb$$

$$\tau_{fi}(\theta) \equiv \frac{1}{2}\int_o^\infty J_1\left(2pb \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)\left[\int_{-\infty}^{\infty} dzU(r) \cdot\right.$$

$$\exp\left(-\frac{i}{2E}\int_{-\infty}^{z}\left[2mU + U^2\right]dz'\right) \quad x$$

$$\left.\operatorname{sen}\left(\frac{b}{E}\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{r}\frac{dU}{dr}dz'\right)\right] bdb$$

y

$$\hat{n} = \frac{\vec{p}_i \wedge \vec{p}_f}{|\vec{p}_i \wedge \vec{p}_f|} \simeq (\hat{q} \wedge \hat{k})$$

es un vector unitario perpendicular al plano de scattering.

Cuando el término de interacción spin-órbita pueda considerarse despreciable, la amplitud de scattering pasa a ser (a todos los órdenes en 1/E y para cualquier potencial escalar con simetría de revolución):

$$F_{fi}(\theta) = u_f^+ \beta t_{fi} u_i \qquad /19/$$

$$t_{fi}(\theta) = -\frac{1}{2}\int_o^\infty J_o\left(2pb \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right) \cdot$$

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} dz\, U(\vec{B}+\hat{k}z)\exp\left(-\frac{i}{2E}\right.\right. \cdot$$

$$\left.\left.\cdot \int_{-\infty}^{z}\left[2mU + U^2\right]dz'\right)\right] bdb$$

y si además la masa de la partícula es lo suficientemente grande frente a la magnitud del potencial, podemos quedarnos tan sólo con el primer término del integrando de la exponencial, con lo que la integral en z resulta ser la de una diferencial exacta y obtenemos la expresión eikonal:

$$t_{fi}(\theta) = -i\frac{E}{2m}\int_o^\infty J_o\left(2pb \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right) \cdot \qquad /20/$$

$$\left[e^{i\chi(\vec{b})}-1\right] bdb$$

donde

$$\chi(\vec{B}) = -\frac{m}{E}\int_{-\infty}^{\infty} U(\vec{B} + \hat{k}z)\, dz$$

Es evidente que, a diferencia del caso no relativista, si se mantiene la interacción spin-órbita no es posible obtener una amplitud de scattering eikonal.

III Aplicación Numérica: Scattering de Protones de Alta Energía .-

Con objeto de estudiar la contribución relativa de cada uno de los términos que intervienen en la amplitud de scattering aplicaremos a continuación las expresiones obtenidas anteriormente al scattering de protones de alta energía.

En las Figuras 1-3 se han representado las secciones eficaces diferenciales de dispersión de protones de 2000 MeV por un potencial escalar gaussiano del tipo

$$V = U(r) = (U_1 + i\, U_2)\exp(-a^2r^2) \qquad /21/$$

$$r^2 = b^2 + z^2$$

donde hemos escogido:

U_1 = 12.5 MeV $\qquad U_2$ = -50. MeV

a = 1/3 Fm^{-1}

Las Figuras 1.a-3.a corresponden al caso general, en el que contribuyen todos los términos, y han sido obtenidas a partir de las Ecuaciones /18/. En las Figuras 1.b-3.b se representan las secciones eficaces obtenidas despreciando las contribuciones del término derivativo en el potencial (interacción spin-órbita), y se han obtenido a partir de las Ecuaciones /19/. Mientras que las Figuras 1.c-3.c corresponden al caso eikonal, en el que

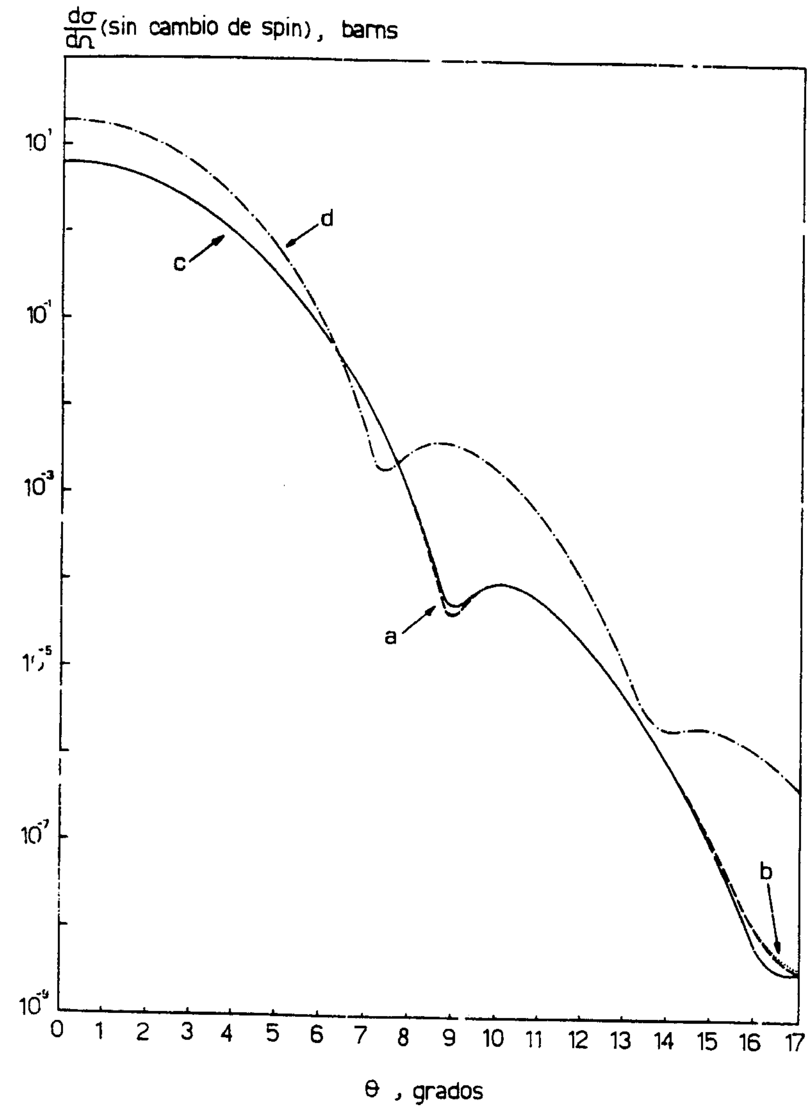

Figura 1

Sección eficaz diferencial sin cambio de spin para el proceso de scattering de protones de 2000 MeV por un potencial gausiano de tipo escalar (curvas a, b y c) o de tipo electrostático (curva d). Las curvas a y c corresponden respectivamente al caso general y al caso eikonal, mientras que la curva b se ha obtenido despreciando el término de interacción spin-órbita.

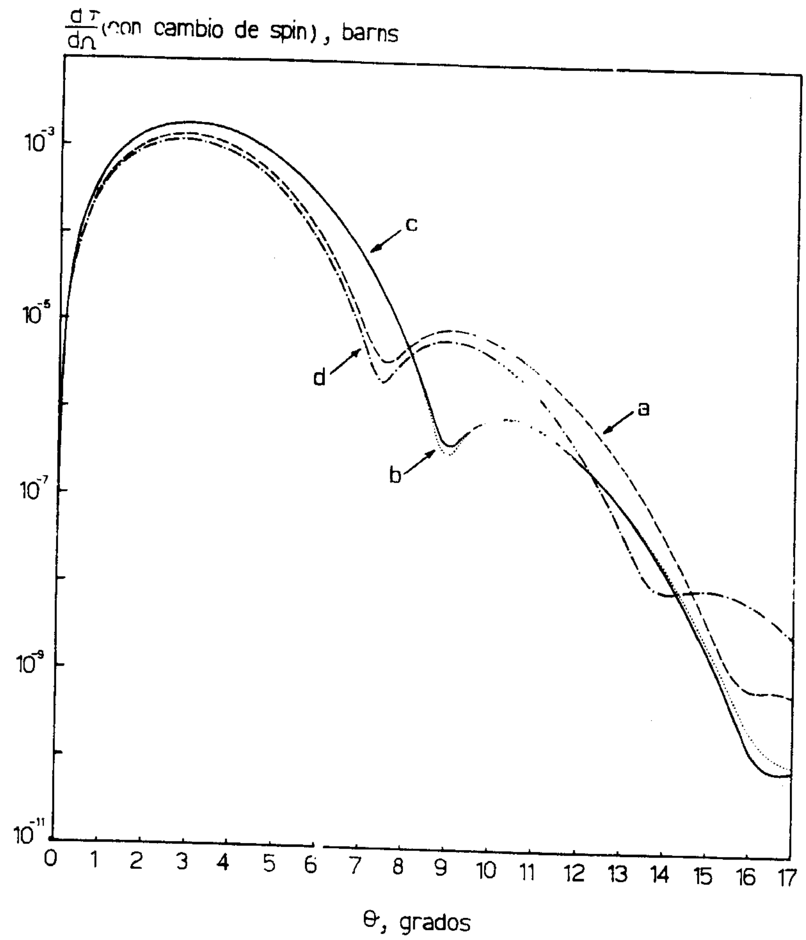

Figura 2

Sección eficaz diferencial con cambio spin para el mismo proceso que en la figura anterior

sólo contribuye apreciablemente el término lineal (Ecuaciones /20/). Finalmente, a efectos de comparación se han representado también (Figuras 1.d-3.d) las secciones eficaces para un potencial electrostático del tipo $V = \beta U(r)$, donde $U(r)$ viene dada por la Ecuación /21/.

A partir de las Figuras anteriores comprobamos que efectivamente los términos de spin-órbita y cuadrático tienen contribuciones despreciables, salvo cuando se considera la sección eficaz diferencial con cambio de spin (figuras 2.a-2.c) en la que el primero contribuye considerablemente como era de esperar. Sin embargo dado que el scattering a alta energía está básicamente concentrado a pequeños ángulos, el proceso de scattering se produce esencialmente sin cambio de spin (compárense las Figuras 3 y 4), de manera que en la práctica podremos ignorar la contribución de los términos no lineales (cuyo efecto se reduce casi exclusivamente a llenar o vaciar los mínimos de difracción de la sección eficaz diferencial de scattering) y quedarnos en la aproximación eikonal.

Hemos visto que los procesos de creación de pares virtuales (que intervienen en el desarrollo a través de φ_{neg}) hacen aparecer términos derivativos y cuadráticos en el potencial que son los responsables de que en general los

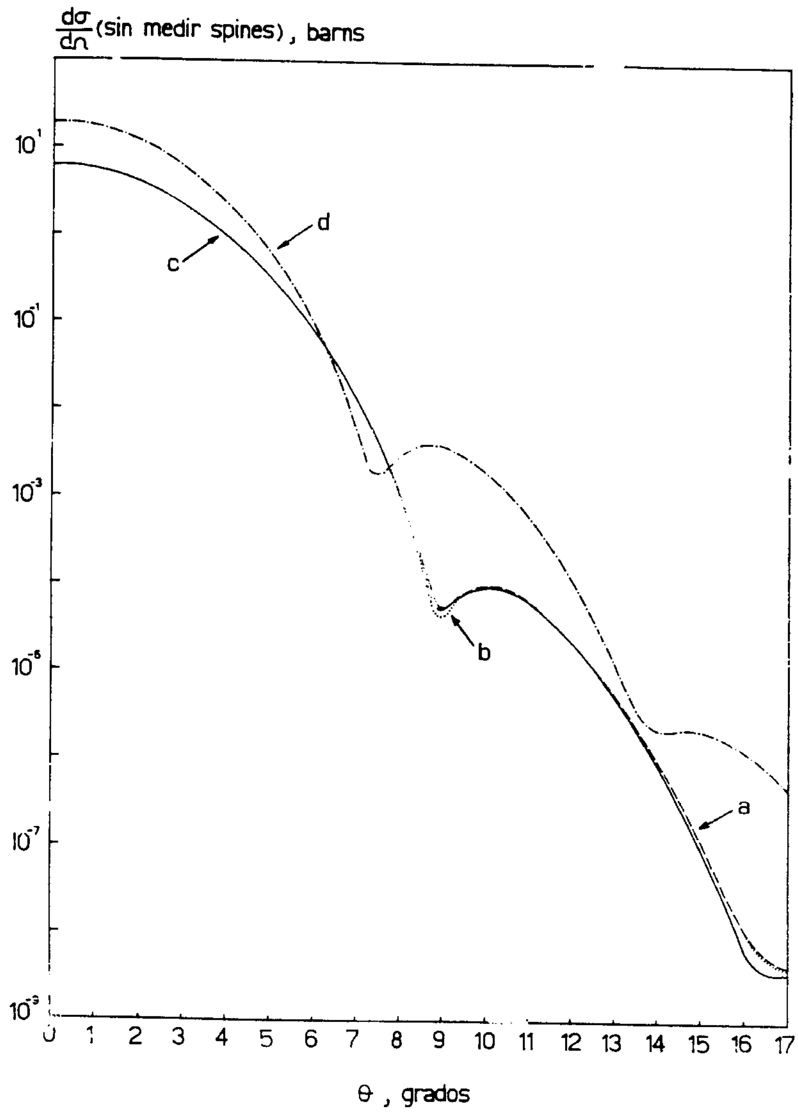

Figura 3

Sección eficaz diferencial sin medir spines para el mismo proceso que en las figuras anteriores.

resultados no sean de tipo eikonal. En el caso de un potencial electrostático siempre es posible desprecar φ_{neg} en el cálculo de φ_{pos} y la amplitud de scattering resultante es eikonal (2-5). Por el contrario para un potencial pseudoescalar no se puede despreciar φ_{neg} y no es posible obtener una aproximación de tipo eikonal. El caso escalar es, como hemos visto, un caso intermedio; en general la amplitud de scattering incluye términos no lineales en el potencial que dan cuenta de la contribución de procesos de creación de pares virtuales. Sin embargo, en el caso del scattering de partículas pesadas de alta energía por potenciales escalares suaves, los términos no lineales tienen contribuciones poco importantes y la amplitud de scattering resulta en muy buena aproximación de tipo eikonal.

Apéndice A .-

Usamos unidades naturales ($\hbar=c=1$). Definimos las matrices β, $\vec{\alpha}$ y $\vec{\Sigma}$ (spin cuadridimensional), mediante

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

donde $\vec{\sigma}$ son las matrices de Pauli usuales.

Los cuadriespinores libres de Dirac correspondientes a energía positiva vienen dados por

$$u^{(\eta)}(\vec{p}) = \sqrt{m+E} \begin{bmatrix} \phi_o^{(\eta)} \\ \frac{\vec{\sigma}\,\vec{p}}{m+E}\,\phi_o^{(\eta)} \end{bmatrix} \qquad (\eta=1,2)$$

con

$$\phi_o^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \phi_o^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$\bar{u}^{(\alpha)}(p)u^{(\eta)}(p) = 2m\delta^{\alpha\eta}$$

donde

$$\bar{u}^{(\alpha)}(p) \equiv u^{(\alpha)\,+}(p)\beta$$

Referencias .-

(1).- R.J. Glauber, en "Lectures in Theoretical Physics", editado por W.E. Brittin y L.G. Dunham (Wiley-Interscience, New York, 1959), Vol. I, pag. 315.

(2).- L.I. Schiff, Phys. Rev 103, 443 (1956).

(3).- A. Barker, Phys. Rev. B 134, 240 (1964).

(4).- Q. Bui-Duy, Phys. Rev. D 11, 1635 (1975).

(5).- M. Lévy and J. Sucher, Phys. Rev. 186, 1656 (1969).

(6).- C.E. Carlson and T.L. Neff. Phys. Rev. D 4, 532 (1971).

(7).- J.J.J. Kokkedee, "The Quark Model" (Benjamin, New York, 1969).